Sobre os Lugares Geométricos com Orientação,

Gerados Por Um Ponto Circulante Ao Longo De Uma Curva $\gamma:(\alpha,\beta)\subset\Re\to\Re^2$, Com Baixa Restrição

Jacques Timmermans [1] **Rosa M. B. Chaves (Orientadora)** [2]
Departamento de Matemática , Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo - Caixa Postal 66.281 - São Paulo - SP, CEP 05315-970
Fone: (+55 xx 11) 3818-6193 - Fax: (+55 xx 11) 3818-6183

IME–USP

Abstract

As trocóides, curvas resultantes da circulação de um ponto ao longo de uma reta, assim como as epitrocóides e hipotrocóides, resultantes da circulação ao longo de um círculo são há muito tempo conhecidas e representam uma família importante de curvas notáveis no $\Re^2$. Uma referência histórica é apresentada com o intuito de avaliar a importância que estas curvas desempenharam no desenvolvimento da matemática e física. Neste trabalho, propomos a definição das circulantes orientadas ao longo de uma curva qualquer e sua classificação. É demonstrado um teorema sobre a forma geral das curvas resultantes da circulação orientada em $\gamma:(\alpha,\beta)\subset\Re\to\Re^2$. Os resultados foram avaliados no *Mathematica* e confirmados. São propostos ainda dois problemas : i) A determinação da curva γ tal que o lugar geométrico resultante da circulação de um ponto P interior de um círculo osculador seja uma reta e ii) A determinação da curva γ tal que o lugar geométrico resultante da circulação de um ponto P interior de um círculo osculador também seja um círculo. Conclusões são apresentadas.

1 Introdução

Dentre as curvas resultantes do rolamento de um círculo, as trocóides são muito especiais. Em particular a ciclóide, que foi chamada de Helena da Geometria, não só por suas múltiplas propriedades, como também por ter sido alvo de disputa entre muitos matemáticos da época. A ciclóide é definida como sendo o lugar geométrico descrito por um ponto que dista de **b** de um círculo de raio **a** que rola sem deslizar sobre uma reta. Se **b<a** então a ciclóide é conhecida como ciclóide reduzida, se **b>a** é alargada, se **a=b** apenas ciclóide. O primeiro que a estudou com profundidade foi Evangelista Torricelli (1608-1647) que em 1644 publicou um tratado sobre ela. Christiaan Huygens (1629-1695) verificou que ambos a evoluta e involuta de uma ciclóide são ciclóides, e desenvolveu a partir daí a teoria geral da evolutas das curvas; publicou ainda em 1673 o *Horologium Oscillatorium*, relatando a descoberta que a ciclóide tem a propriedade *tautócrona*, ou seja, desprezando-se o atrito, se invertermos uma ciclóide e deixarmos cair um objeto pela mesma este chegará no ponto mais baixo da curva em um intervalo de tempo que não dependerá do ponto de partida. Outro resultado obtido por Huygens foi a determinação da trajetória que deve oscilar um pêndulo de maneira que seu período permaneça constante, independente da amplitude de oscilação. Essa curva, denominada *isócrona* resultou ser também a ciclóide. Outro problema famoso foi o problema da *braquistócrona*, proposto por Johann Bernoulli (1667-1748) em 1696 e consiste em encontrar uma curva que una dois pontos **A** e **B** situados num mesmo plano vertical com a propriedade de uma partícula inicialmente em repouso que deslize sobre essa curva, leve o menor tempo possível para ir, sob a ação da gravidade, de **A** até **B**. O ponto **A** é suposto estar acima do ponto **B** mas não na mesma vertical. Quando **A** e **B** se encontram na mesma vertical. A solução desse problema foi publicada pouco menos de um ano após a sua proposição, por Jacob (Jacques) Bernoulli (1654-1705), irmão mais velho de Johann Bernoulli levando novamente a ciclóide. Isto caracterizou o início dos problemas variacionais e sua investigação foi o início do desenvolvimento do Cálculo Variacional. Por outro lado, as curvas descritas por um ponto **P**, que dista **c**, do centro de uma circunferência de raio **b** à medida que esta rola sem deslizar pelo exterior de outra, cujo raio é **a** são as epitrocóides. Um caso particular das epitrocóides são as epiciclóides **(b=c).** Os casos especiais das epiciclóides, por sua vez, são as cardióides (a=b) e as nefróides (a = 2b). No caso de rolarem interiormente são as hipotrocóides. Um caso particular das hipotrocóides são as hipociclóides (b=c). Os casos especiais da hipociclóide são a tricuspóide ou deltóide (a=3b) e a tetracuspóide ou astróide (a=4b). Estas curvas foram estudadas por Albrecht Dürer (1741-1528) em 1525, Girard Desargues (1591-1661) em 1640, Huygens (1679), Leibniz, Newton (1686), Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital (1661-1704) em 1690, Jacob Bernoulli (1690), Philippe de La Hire (1640-1718), Johann Bernoulli em 1695, Daniel Bernoulli (1700-1782) em 1725, Leonhard Euler (1707-1783) em 1745, 1781. Estas curvas notáveis resultantes da circulação de um círculo de raio b, com **P** pertencente ao círculo distando de **c** do centro ao longo de uma reta ou ao longo de um circulo de raio **a**, podem ser classificadas segundo o esquema apresentado na figura 1.

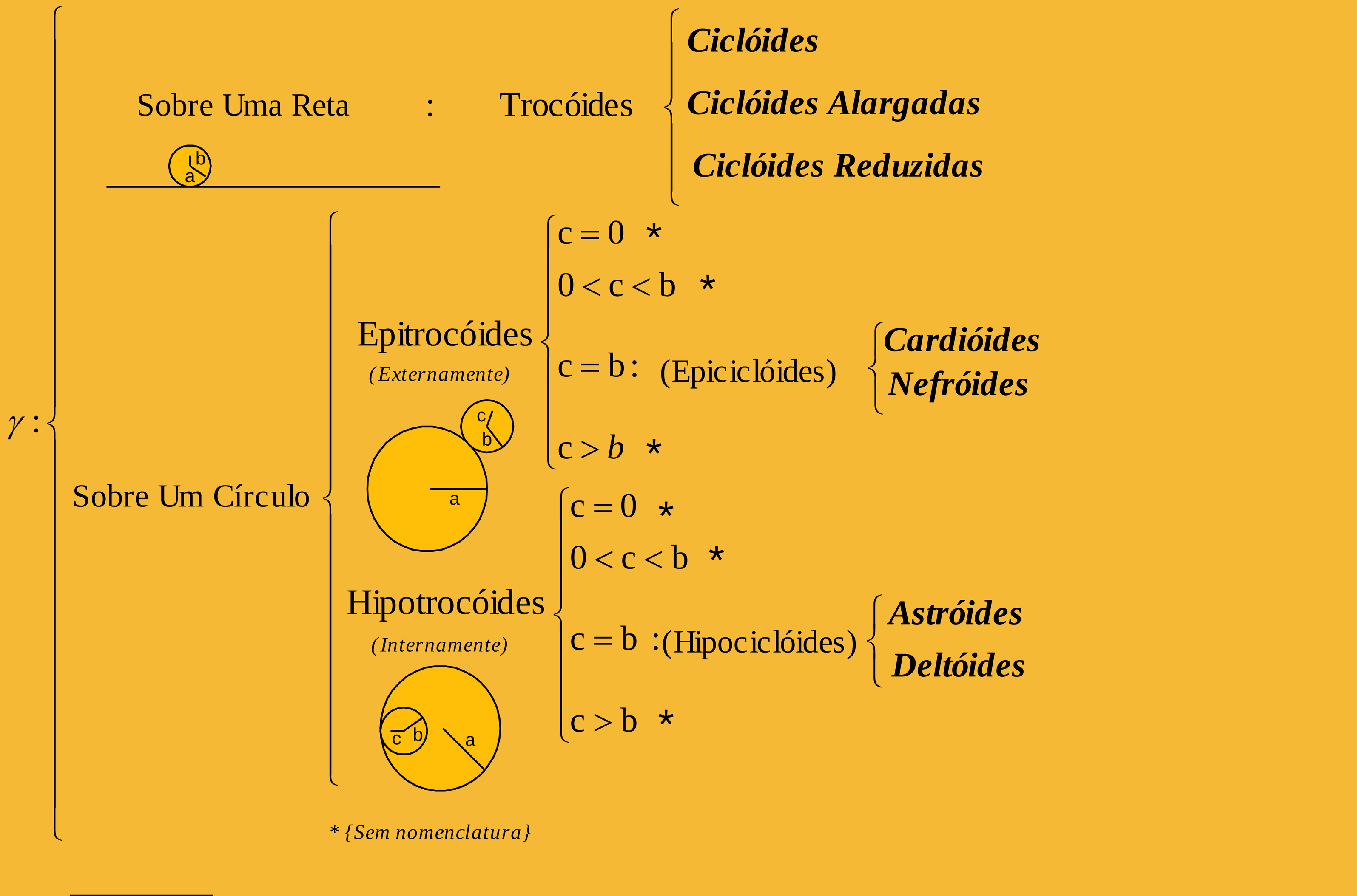


figura 1 — Sistema classificatório para as trocóides, epitrocóides & hipotrocóides

Dentre as curvas citadas podemos analisar os traços conforme a figura 2.

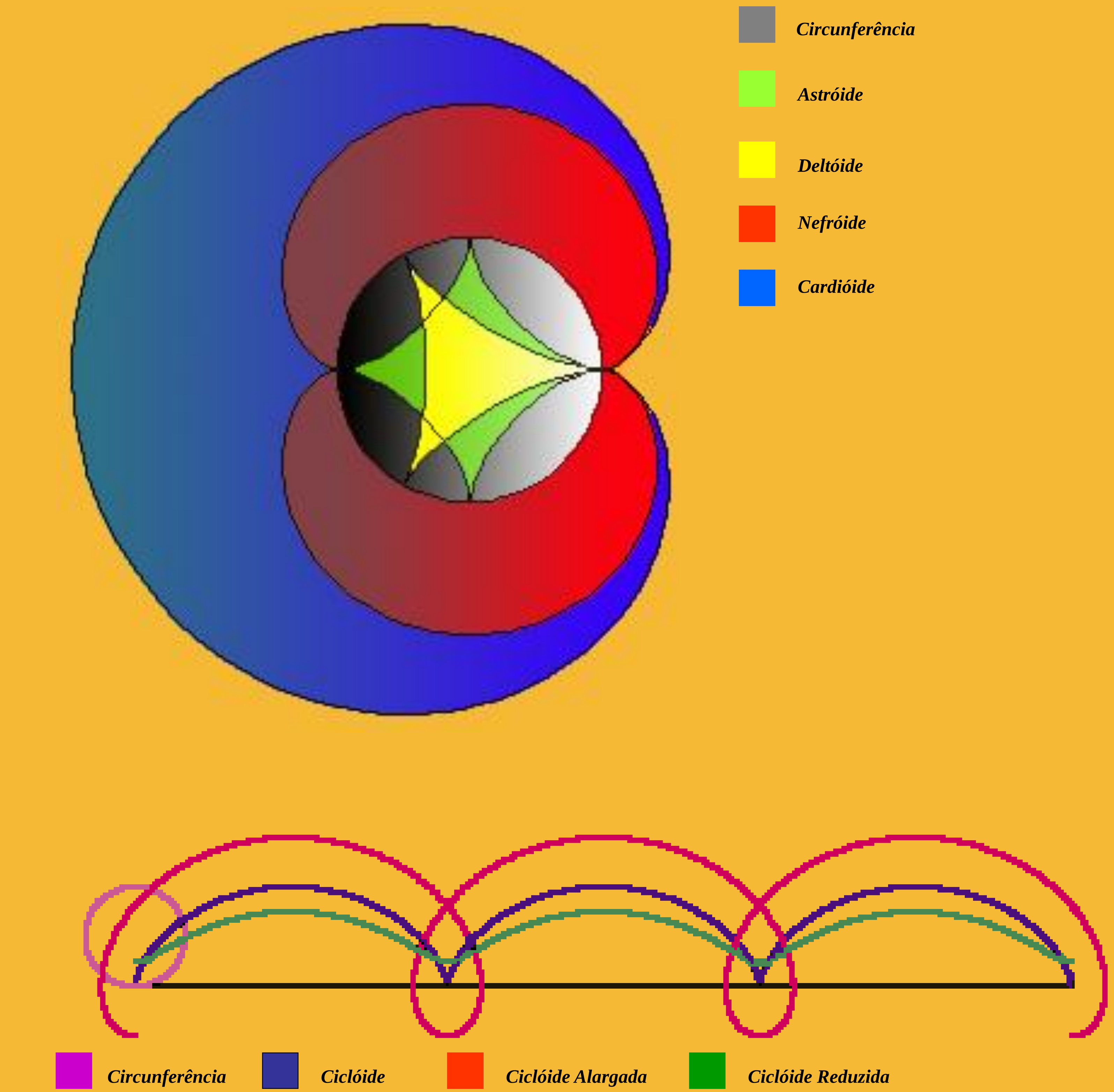


figura 2 — Traço das Trocóides, Epiciclóides & Hipociclóides clássicas

O problema abordado neste trabalho consiste em encontrar a forma geral das curvas $\varphi(t)$ que descrevem o lugar geométrico orientado resultante da circulação de um ponto ***P*** ao longo de uma curva $\gamma:(\alpha,\beta)\subset\Re\to\Re^2$, de classe C^1 , de modo que **P** pertença à um círculo de raio **a** e dista **b** do centro, conforme a figura 3.

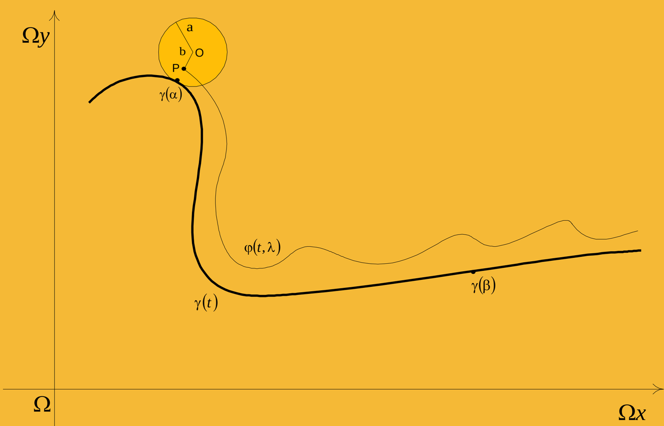


figura 3 – A curva γ e sua circulante

2 Definições

Definição 1. Denomina-se curva circulante orientada de λ , a curva $\varphi(\lambda,t)$ que representa o lugar geométrico orientado descrito por um ponto P que dista b>0 do centro de um círculo osculador de raio *a>0* , ao circular, sem deslizar, ao longo da curva λ com orientação λ dada.

Definição 2. Denominam-se circuláveis as curvas de classe C^1 que admitem uma curva circulante. Caso contrário, as curvas são denominadas incirculáveis.

Definição 3. A estrutura classificatória fundamental das curvas circulantes $\varphi(\lambda,t)$ é dada a partir da característica de λ , conforme a figura 4.

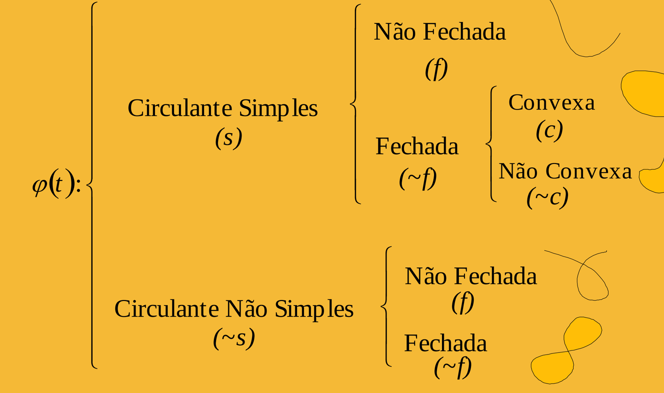


figura 4 — Classificação fundamental das circulantes

Definição 4. Denomina-se orientação de uma circulante a propriedade desta ser dextrógira ou levógira. As circulantes são dextrógiras quando o centro O do círculo osculador é dado por $O=\gamma(t)+\lambda\hat{n}$ com $\lambda>0$, em outros termos o versor normal à curva $\hat{n}$ aponta para o centro do círculo osculador. Caso contrário são levógiras com $\lambda<0$, o que equivale a dizer que o versor $\hat{n}$ não aponta para o centro do círculo osculador. Em ambos os casos λ é o fator orientacional da circulante.

Definição 5. Denomina-se característica secundária de uma circulante a posição relativa do ponto interior ao círculo. Se **b=0**, definimos as replicantes. Para **b<a** definimos as circulantes reduzidas e **b>a** as circulantes alargadas. Se **b=a** definimos as circulantes naturais.

3 Teorema Fundamental das Circulantes

Seja $\gamma:(\alpha,\beta)\subset\Re\to\Re^2$ *, uma curva regular* $(\|\dot{\gamma}(t)\|>0)$ *de classe* C^1*, dada parametricamente por* $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ *com orientação* λ *. Então a forma geral da circulante de* $\gamma(t)$ *é dada por :*

$$\varphi(t,\lambda)=\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\begin{pmatrix}\dot{x}(t) & -\dot{y}(t)\\ \dot{y}(t) & \dot{x}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b\,\mathrm{sen}\dfrac{s(t)}{a}\\ \langle\lambda\rangle\left[a-b\cos\dfrac{s(t)}{a}\right]\end{pmatrix}+\gamma(t)$$

onde :

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}\|\dot{\gamma}(t)\|dt$$

$\langle\lambda\rangle=1$ se φ é *dextrógira* e $\langle\lambda\rangle=-1$ se φ é *levógira*

4 Conclusões

Mediante o Teorema desenvolvido foi possível abordar o problema da determinação da curva $\gamma(t)$ tal que o lugar geométrico resultante da circulação de um ponto P interior de um círculo osculador seja uma reta. O problema consiste na solução de um sistema de equações integro-diferencial conforme :

$$(f(t),0)=\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\begin{pmatrix}\dot{x}(t) & -\dot{y}(t)\\ \dot{y}(t) & \dot{x}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b\,\mathrm{sen}\dfrac{s(t)}{a}\\ \langle\lambda\rangle\left[a-b\cos\dfrac{s(t)}{a}\right]\end{pmatrix}+\gamma(t)$$

A solução particular deste problema para **a=b** encontrada foi :

$$\gamma(t)=2a\left(1+2a\psi\left(\frac{t}{2a\pi}\right)-\cos\frac{t}{2a},\pm\left|\mathrm{sen}\frac{t}{2a}\right|\right)$$

Sendo a função $\psi(u)$ definida conforme :

$$\psi(u):\begin{cases}n-1\ \text{se}\ u\to n, n\in N\\ n\ \text{se}\ u=n+\varepsilon,\varepsilon\to 0, n\in N\end{cases}$$

A curva obtida com $\|\dot{\gamma}(t)\|=1$ denominamos de ***Circulada Singular Geratriz da Reta***, trata-se de uma curva constituída de semi-círculos ligados. Na figura 5 podemos observar o traço da curva para $t\in[0,6\pi]$ e o círculo osculador com **a=b=1**. Nota-se os semi-círculos de **raio=2**.

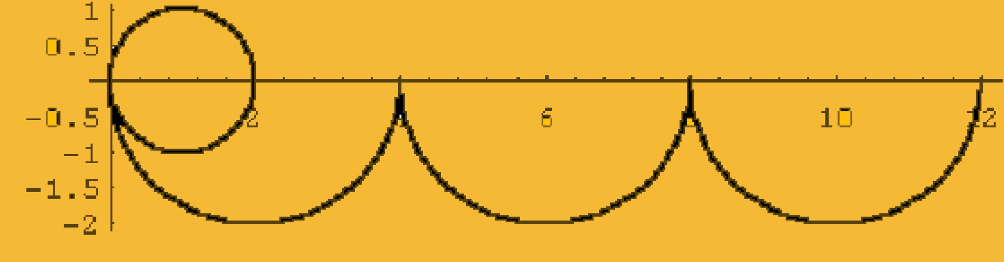


figura 5 — Traço da Circulada Singular Geratriz da Reta

Observa-se um comportamento singular para $t=2an\pi, n\in N.$ O problema da determinação da curva $\gamma(t)$ tal que o lugar geométrico resultante da circulação de um ponto P interior de um círculo osculador gere um círculo está em aberto. Concluiu-se, de modo geral, que a resolução analítica das circulantes pode em muitos casos ser obtida. A resolução numérica, no entanto, demonstrou ser facilmente resolvida no *Mathematica* em todos os casos. Na abordagem inversa do problema, ou seja, a obtenção de uma curva, dada a sua circulante recai em um sistema de equações integro-diferenciais de alta complexidade, sendo a resolução numérica igualmente complexa mesmo para os casos mais simples.

5 Referências

[Abr] M. Abramowitz and I.A. , Stegun, **Handbook of Mathematical Functions**, Dover Publications, New York, 1965.
[Car] M. P. do Carmo, **Differential Geometry of Curves and Surfaces**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
[Gry] A. Gray, **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**, Second Edition, CRC Press, 1998.
[Cajori] F. Cajori, **A History of Mathematics**, Third Edition, Chelsea Publishing Co., New York, 1980.
[Wolf] S. Wolfram, **The Mathematica Book**, Fourth Edition, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1999.

1 e-mail — jtimmerm@socrates.if.usp.br
2 e-mail — rosab@ime.usp.br
3 Mathematica é marca registrada de Wolfram Research, inc.